AUFGABE 6

Name des Prüflings:..

Etwas für Naturwissenschaftler...

Wäre es nicht schön, wenn Maschinen musikalische Töne aussenden würden statt Lärm? Leider wohl eine unmögliche Sache - und so bleibt folgende Aufgabe leider nur ein Gedankenexperiment...

Sie befinden sich auf einem Flugplatz und beobachten das Treiben auf den Start- und Landebahnen: Sie sehen 3 Flugzeuge *gleichen* Typs (> sie senden also den gleichen Ton aus, was ja eigentlich auch eine gleiche momentane Motorenleistung voraussetzen würde, was ebenfalls wohl kaum realistisch wäre...).

- Ein Flugzeug rast auf Sie zu, kurz vor dem Abheben (Sie befinden sich beim Ende der Startbahn)
- Das zweite steht noch am Pistenanfang mit voller Leistung, weil es gleich die Bremsen lösen wird
- Ein drittes nähert sich dem Flugplatz (aber in sicherem Abstand) in Reisegeschwindigkeit, weil es mit der Landung noch warten muss, bis die anderen ausser Reichweite sind

Und - oh Wunder! - Sie hören als Beobachter folgenden wunderbaren Klang:

Welcher Ton entspricht welchem der 3 Flugzeuge?

Geben Sie die Geschwindigkeit von Flugzeug 1 und 3 bezogen auf Ihren Standpunkt an (das zweite hat selbstverständlich die Geschwindigkeit "null", weil es noch steht...).

Als Schallgeschwindigkeit nehmen Sie bitte 1235 km/h = Mach 1 an

(Ihr Text >>>)

6 Eine etwas irreale Annahme...

Nur sehr wenige haben diese ("naturwissenschaftliche">ETH) Aufgabe vollständig richtig gelöst! Grundvoraussetzung: *Die 3 Flugzeuge senden den gleichen Ton aus (zugegeben irreal, da die Motorenleistung des gerade abhebenden wohl am grössten ist, und die des wartenden am kleinsten).*

Die Schwierigkeit war, dass hintereinander vernetzt musikalisch und physikalische Fakten in eine logische Kette gebracht werden mussten:

1) dis - fis - ais (die absoluten Frequenzen spielen keine Rolle, da sie sich herauskürzen) ist ein dis-Moll Dreiklang, hat also unten eine kleine Terz (Frequenzverhältnis 6/5), und oben eine grosse Terz (Verhältnis 5/4); das Randintervall (dis-ais) ist eine reine Quinte (3/2) - dies, wenn man "rein" berechnet.

☞ Einige haben temperiert gerechnet, was kleine Abweichungen im Endergebnis verursachte (durchaus auch korrekt: daraus folgt: "DIE" Stimmung gibt es nicht!). Hier wird ein temperierter Halbton als $\sqrt[12]{2}$ gerechnet.

2) Ich habe im Internet div. Beschreibungen von Flugzeugtypen gesucht: Überall ist die Reisegeschwindigkeit sehr viel höher als die Startgeschwindigkeit. Deshalb hat das stehende Flugzeug die tiefste Frequenz (dis), das startende die mittlere (fis) und das vorbeifliegende die höchste (ais).

3) Die Wahrnehmung des Beobachters ist vom Dopplereffekt beeinflusst (Martinshorn des auf uns zukommenden Krankenwagens klingt scheinbar höher = grössere Frequenz, weil die Wellenlänge "zusammengedrückt" wird).
In Formelsammlungen findet sich:

$$f_B = \frac{f_S}{1 - \frac{v}{c}}$$

Dabei bedeuten *f* die Frequenz (S Schallquelle/ B Beobachter), *c* die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls und *v* die Geschwindigkeit der Schallquelle (also des Krankenwagens).
(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Dopplereffekt)

Durch Umformung der Formel ergeben sich folgende Geschwindigkeiten:

Lösung: **Flugzeug 1** rast im (für Sie) scheinbaren Ton "fis" (=kleine Terz) mit **205,83 km/h** über die Piste, gleich abhebend.

Flugzeug 3 fliegt mit scheinbarem Ton "ais" (reine Quinte) in einer Geschwindigkeit von **411,6 km/h** auf den Beobachter zu.

Die Tonhöhe "dis" des stehenden (0 km/h) Flugzeugs hören sie in originaler Höhe (weil hier kein Dopplereffekt eintritt wie bei den anderen)

...allerdings: Auch "schöne" Molldreiklänge würden uns nerven; vielleicht noch mehr?

Eine der wenigen völlig korrekten Lösungen sei hier abgedruckt:

>>>>>>

(auseinander)

klassischer ~~Dopp~~ Dopplereffekt mit ruhendem Beobachter und bewegter Quelle ?

$f = f_0 \frac{u}{u - v_q}$ $\quad$ f gehörte Frequenz, f_0 Sendefrequenz, u Schallgeschw., v_q Geschwindigkeit der Quelle

kleine Terz $\frac{6}{5}$ $\quad$ Quinte $\frac{3}{2}$

Flugzeug 1

$$\frac{f}{f_0} = \frac{6}{5} = \frac{u}{u - v_q} \iff \frac{6}{5}(u - v_q) = u \iff -\frac{6}{5} v_q = u\left(1 - \frac{6}{5}\right)$$

$$\iff \frac{6}{5} v_q = \frac{1}{5} u \Rightarrow \underline{v_q = \frac{1}{6} u}$$

→ das 1. Flugzeug fliegt mit Mach $\frac{1}{6}$ = 205.8 km/h

Flugzeug 2

$$\frac{f}{f_0} = \frac{3}{2} = \frac{u}{u - v_q} \iff (u - v_q)\frac{3}{2} = u \iff -\frac{3}{2} v_q = u\left(1 - \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} v_q = \frac{1}{2} u \Rightarrow v_q = \frac{1}{3} u$$

→ das 2. Flugzeug fliegt mit Mach $\frac{1}{3}$ = 411.7 km/h

(also doppelt so schnell wie Flugzeug 1)

Da ich aber sehr viele abweichende Lösungen vorfand, habe ich mich bei einem Mathematiker und Physiker zur Absicherung noch einmal erkundigt (ich bedanke mich herzlich bei Herrn Dr. Fr. Müller, langjähriger Assistent ETH): Seine Ausführungen berücksichtigen auch Lösungen in m/s statt km/h, sowie die Variante mit temperierter Stimmung:

es ist v=(1-f0/f1)c, also

v1 = (1-5/6)c = 1235/6 km/h = 205.8333 km / h = 205.8333 x 1000m/3600sec = 57.17 m / sec

oder temperiert

v1_temp = (1-1/2^(3/12)) c = (1 - 1/2^(1/4)) c = (1 - 1 / 1.1892) c =
= (1 - 0.8409) c = 0.1591 c = 196.5 km/h = 54.58 m/sec .

und ebenso

v2 = (1-2/3) c =1235/3 km/h = 411.666 km / h = 114.35 m / sec

oder temperiert

v2_temp = (1-1/2^(7/12)) c = (1 - 1/1.4983) c = (1 - 0.6674) c =
= 0.3326 c = 410.73 km / h = 114.09 m / sec .

Auf falsche Lösungen angesprochen (z.B. 247 km/h und 617 km/h), führt Dr. Müller aus:

> ***das Frequenzverhältnis ist *nicht* proportional zu (v+c)/c***
>
> ***(sondern zu c/(c-v)=1/(1-v/c) !)***
>
> ***was die abweichenden/falschen Lösungen offenbar fälschlicherweise annehmen***
>
> ***(sonst wäre bei einem Flugzeug mit Mach 1 (v=c) eine***
>
> ***Oktave statt ein Überschallknall zu hören !!!!)***